7.4.10 Výpočty vzdáleností II

Př. 1: Urči vzdálenost přímek $p:\{[2-t;1+2t;-2+t], t\in R\}$ a $q:\{[-1+2t;1-t;-2+3t], t\in R\}$ od roviny $\rho: x-y-z+3=0$.

$\boldsymbol{n}_\rho=(1;-1;-1)$ $\quad$ $\boldsymbol{u}_p=(-1;2;1)$ $\quad$ $\boldsymbol{u}_q=(2;-1;3)$

Je přímka *p* rovnoběžná s rovinou ρ?

$\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{u}_p=(1;-1;-1)(-1;2;1)=1\cdot(-1)+(-1)\cdot2+(-1)\cdot1=-4 \Rightarrow$ ***p* není rovnoběžná s ρ.**

Je přímka *q* rovnoběžná s rovinou ρ?

$\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{u}_q=(1;-1;-1)(2;-1;3)=1\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot3=0 \Rightarrow$ ***q* je rovnoběžná s ρ.**

Bod na přímce *q*: $Q[-1;1;-2]$.

Dosadíme do vzorce $d=\dfrac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot1+(-1)(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Př. 2: Na ose *y* najdi bod *Y*, který je stejně vzdálen od bodů $A[-1;3;-5]$ a $B[3;1;1]$.

Bod *Y* leží na ose *y* $\Rightarrow$ jeho souřadnice: $Y[0;y;0]$.

$|AY|=|BY|$: $\sqrt{(-1-0)^2+(3-y)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(1-0)^2} \qquad /^2$

$1+(9-6y+y^2)+25=9+(1-2y+y^2)+1$

$1+9-6y+y^2+25=9+1-2y+y^2+1 \qquad 24=4y \qquad y=6 \qquad Y[0;6;0]$.

Jiný postup:

Střed úsečky *AB*: $S_{AB}[1;2;-2]$ $\qquad$ Vektor $B-A=(4;-2;6)\Rightarrow\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;3)$

Rovnice roviny ρ: $2x-y+3z+d=0$.

Prochází bodem S_{AB}: $2x-y+3z+d=2\cdot1-2+3\cdot(-2)+d=0\Rightarrow d=6$

Rovina $\rho: 2x-y+3z+6=0$.

Upravíme na úsekový tvar: $2x-y+3z=-6 \quad /:(-6)$.

$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{-2}=1 \qquad Y[0;6;0]$.

Př. 3: Urči vzdálenost bodu $A[-2;5;-4]$ od přímky $p:\{[-3+4t;-2+t;3-t], t\in R\}$.

- *P* leží na přímce *p*. $\Rightarrow$ $P[-3+4t;-2+t;3-t]$
- Vektor $A-P$ je kolmý na směrový vektor přímky *p*. $\Rightarrow$ $(A-P)\cdot\boldsymbol{u}_p=0$

$A-P=(-2-[-3+4t];5-[-2+t];-4-[3-t])=(1-4t;7-t;t-7)$

$(A-P)\cdot\boldsymbol{u}_p=(1-4t;7-t;t-7)\cdot(4;1;-1)=0$

$(1-4t)\cdot4+(7-t)\cdot1+(t-7)(-1)=0$

$4-16t+7-t+7-t=0 \qquad 18=18t \qquad t=1$

$P[-3+4\cdot 1;-2+1;3-1] \Rightarrow P[1;-1;2]$.

$AP = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-(-1))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{3^2+6^2+(-6)^2} = 9$.

Jiný přístup:

$p: \{[-3+4t;-2+t;3-t], t \in R\} \Rightarrow \boldsymbol{u}_p = (4;1;-1) = \boldsymbol{n}_\rho \Rightarrow \rho: 4x+y-z+d=0$.

Dosadíme bod $A[-2;5;-4]$: $4x+y-z+d = 4\cdot(-2)+5-(-4) = 0 \Rightarrow d = -1$.

Rovina ρ kolmá na *p* procházející bodem *A*: $4x+y-z-1=0$.

$4(-3+4t)+(-2+t)-(3-t)-1=0 \qquad 18t=18 \qquad t=1$

Dál už je postup stejný.

Př. 4: Na přímce $p = \{[1+k;2+k;2k]; k \in R\}$ najdi bod, který je od přímky $q = \{[2+t;3;1-t]; t \in R\}$ vzdálený 3.

Bod $P[1+k;2+k;2k]$. $\boldsymbol{n}_\rho = (1;0;-1) \Rightarrow$ rovnice $x-z+d=0$.

Dosadíme bod $P[1+k;2+k;2k]$: $(1+k)-2k+d=0 \Rightarrow d=k-1$.

Rovnice kolmé roviny: $x-z+k-1=0$.

Průsečík roviny s přímkou *q*: $(2+t)-(1-t)+k-1=0$

$2+t-1+t+k-1=0 \quad 2t=-k \qquad t=-\frac{k}{2}$

Souřadnice bodu *Q* (pata kolmice na přímku *q*): $Q[2+t;3;1-t] \Rightarrow Q\left[2-\frac{k}{2};3;1+\frac{k}{2}\right]$.

$|PQ|=3 \qquad \sqrt{\left[(1+k)-\left(2-\frac{k}{2}\right)\right]^2 + [(2+k)-3]^2 + \left[2k-\left(1+\frac{k}{2}\right)\right]^2} = 3 \quad /^2$

$\left(\frac{3}{2}k-1\right)^2 + (k-1)^2 + \left(\frac{3}{2}k-1\right)^2 = 9 \quad \frac{9}{4}k^2-3k+1+k^2-2k+1+\frac{9}{4}k^2-3k+1=9$

$\frac{9}{2}k^2+k^2-8k=6 \quad /\cdot 2 \qquad 9k^2+2k^2-16k-12=0 \qquad 11k^2-16k-12=0$

$k_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 11\cdot(-12)}}{2\cdot 11} = \frac{16\pm 28}{22}$

$k_1 = k_{1,2} = \frac{16+28}{22} = 2 \Rightarrow P_1[1+2;2+2;2\cdot 2] \Rightarrow P_1[3;4;4]$

$k_2 = k_{1,2} = \frac{16-28}{22} = -\frac{6}{11} \Rightarrow P_2\left[1+\left(-\frac{6}{11}\right);2+\left(-\frac{6}{11}\right);2\cdot\left(-\frac{6}{11}\right)\right] \Rightarrow P_2\left[\frac{5}{11};\frac{16}{11};-\frac{12}{11}\right]$

Zadání splňují body $P_1[3;4;4]$ a $P_2\left[\frac{5}{11};\frac{16}{11};-\frac{12}{11}\right]$.

Př. 5: Petáková:
strana 119/cvičení 58
strana 119/cvičení 59
strana 120/cvičení 60 a)
strana 120/cvičení 61
strana 120/cvičení 65